Sistema Price de amortização
Juros simples?

Claudio José Luchesa, Edson A. Mantovan e Cristiane Ribas Machado

Sumário

1. Introdução, objetivos e metodologia

A cobrança de uma remuneração pelo empréstimo de dinheiro, chamada juro, é tema controverso e polêmico desde a mais remota Antiguidade. No Antigo Testamento, a Bíblia faz cinco referências à usura. O texto sagrado considera que o usurário vende o tempo e que este pertence só a Deus (LE GOFF, 1989). Dessa perspectiva decorria que o usurário vendia o que não lhe pertencia, imputando, assim, à usura, o atributo de pecado.

Ainda de acordo com Le Goff (1989, p. 29) Tomás de Aquino, um dos chamados doutores da Igreja, afirmava: *nummus non parit nummos*, dinheiro não gera dinheiro, justificando, assim, a não cobrança de juros nos empréstimos. Morgan (1965) afirma que a usura é tão antiga quanto a moeda. A propósito, esse autor cita Demosthenes

Claudio José Luchesa é doutor em Economia e Política Florestal, UFPR; Mestre em Ciências Sociais Aplicadas, UNICS; Especialista em Desenvolvimento Gerencial, UNOESC; Bacharel em Administração de Empresas, PUC-PR; Professor.

Edson A. Mantovan é mestre em Administração, UFSC-SC; Especialista em Matemática, UNIPAR; Bacharel em Engenharia Eletrônica e Telecomunicações, CEFET-Pr; Professor.

Cristiane Ribas Machado é mestre em Administração PUC-PR; Especialista em Finanças Corporativas, UFPR; Bacharel em Administração, Centro Universitário Curitiba – Unicuritiba; Professora.

(1936, p. 325): “e mais cinquenta talentos em dinheiro emprestados a juro, dos quais onze talentos de depósitos bancários investidos lucrativamente”.

No entanto, a partir do século XII, a evolução econômica da sociedade provocou uma mudança de paradigmas, em relação à cobrança de juros. A este respeito, Le Goff (1989, p. 36) informa que:

> “Com efeito tudo mudou no século XII, em primeiro lugar porque o impulso econômico levou a um crescimento enorme da circulação monetária e ao desenvolvimento do crédito. Algumas formas de crédito foram admitidas, outras, como o empréstimo para consumo com juros embutidos, viram as antigas condenações renovadas e fixadas, e sua repressão aumentada.”

Assim, premida por necessidades econômicas, a sociedade como um todo, a Igreja em particular, passaram paulatinamente a aceitar o empréstimo de dinheiro a juro. Modernamente, o pagamento de juros ao prestamista é prática aceita universalmente; o aluguel do dinheiro tem, hoje, o seu preço estabelecido exatamente pela taxa de juro.

Persistem, todavia, no Brasil, algumas tentativas de limitar o ganho do prestamista e, em contrapartida, reduzir o custo para o tomador. A legislação brasileira tem regulamentado a matéria desde 1832, quando uma lei de 24 de outubro daquele ano permitiu a cobrança de qualquer taxa nos empréstimos a juros. Posteriormente, numa mudança radical de posição com respeito ao tema, o Código Civil de 1916, bem como as Constituições de 1933 e 1946, limitaram as taxas de juros e estabeleceram punições à usura. Diversos outros diplomas legais, de hierarquia inferior, também trataram da matéria. Por fim, a Constituição Federal de 1988 limitou a taxa máxima de juros em 12 % ao ano, exceto nas operações realizadas por instituições financeiras.

Todavia, uma questão polêmica surgiu quando tribunais brasileiros passaram a prolatar sentenças, levando em consideração que o sistema de amortização de empréstimos mediante o pagamento de prestações iguais e consecutivas, conhecido como “Tabela Price”, se fundamentava no conceito de juros simples.

Este artigo resolve esta questão sob o ponto de vista exclusivamente matemático, única via de prova absolutamente irrecorrível. Não questiona as decisões prolatadas pelos magistrados, os quais, seguramente, se fundamentaram na opinião de especialistas. Questiona-se aqui, isto sim, a opinião equivocada de tais especialistas. Recorrendo a demonstrações indutivas e dedutivas, o texto prova que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros compostos e, por decorrência, nos seus procedimentos de cálculo característicos. Além e acima disso, demonstra o fundamento conceitual e o procedimento de cálculo de um sistema de amortização, semelhante ao sistema Price, em prestações iguais e consecutivas, porém a juros simples.

De início, com o emprego de um exemplo numérico, demonstra-se indutivamente que uma operação de amortização pelo sistema Price tanto pode supor o pagamento integral dos juros a cada período, quanto supor capitalizá-los, incorporando-os ao capital; o resultado é, exatamente, o mesmo. Isso mostra a facilidade de conduzir ao erro os não iniciados em matemática financeira, mostrando falaciosamente que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros simples.

A seguir, também recorrendo a um exemplo numérico, demonstra-se que se o sistema Price fosse fundamentado no conceito e nos procedimentos de cálculo específicos e exclusivos dos juros simples, o desconto das prestações para valor presente, à mesma taxa empregada para o cálculo da prestação, deveria resultar no capital inicial, o que não ocorre. Todavia, se o desconto for feito a juros compostos tal desconto resultará exatamente no capital inicial; trata-se, assim, de uma prova irrecorrível.

Em seguida, deduz-se a fórmula para o cálculo da prestação pelo sistema Price, o que permite demonstrar, agora algebricamente, que o sistema Price é, de fato, um sistema de amortização fundamentado no conceito e nos procedimentos de cálculo específicos e exclusivos dos juros compostos.

Por último, demonstra-se, também algebricamente e mediante o emprego de um exemplo numérico, como se processa o cálculo da amortização de um capital, com prestações iguais e consecutivas, da mesma maneira que o sistema Price – agora, porém, a juros simples.

2. Fundamentos conceituais

2.1. O valor do dinheiro no tempo – a taxa de juros

A teoria econômica afirma que o dinheiro tem diferentes valores, a depender de quando esteja disponível para o seu proprietário. É muito diferente, por exemplo, dispor imediatamente de \$ 100,00 no bolso, de possuir uma nota promissória de \$ 100,00, aceita por um devedor e vincenda algum tempo à frente. Diversas razões conduzem a esse conceito conhecido como "valor do dinheiro no tempo". A possibilidade de que o devedor não pague a dívida e a possível ocorrência de inflação até o vencimento fazem com que a nota promissória de \$ 100,00 valha menos do que os \$ 100,00 em moeda corrente, no bolso (PUCCINI, 2004).

Assim, as pessoas exigem uma remuneração, chamada juros, para trocar a sua poupança da condição de moeda corrente para a condição de um título a receber no futuro. Keynes (1992) definiu a poupança como sendo o excedente do rendimento sobre os gastos de consumo. Definiu também o sentido mais profundo do empréstimo de dinheiro a juros afirmando que o juro é a contrapartida que as pessoas exigem para abrir mão da sua liquidez. Relacionou três fatores determinantes para que as pessoas tenham preferência pela liquidez: transação, precaução e especulação (KEYNES, 1992). Por transação, define-se a finalidade da moeda empregada para as operações cotidianas de compra e venda. A finalidade precaução decorre da prudência que as pessoas têm de manter uma reserva financeira para fazer frente a emergências que possam surgir. A finalidade especulação define a manutenção de uma reserva financeira para aproveitar eventuais oportunidades negociais que possam surgir.

Keynes (1992) centrou a sua explicação para a existência de juros na preferência que as pessoas têm, de manter suas poupanças disponíveis em moeda corrente, em vez de mantê-las na forma de um título de crédito. Segundo o autor, os juros são a contrapartida que as pessoas exigem, para abrir mão da sua liquidez.

A partir destes conceitos, a teoria econômica moderna ensina que a taxa de juros nominal vigente em determinada economia, em dado momento, é formada por três componentes: $i = i^* + Ip + Rp_1$ (GITMAN, 2010)[1].

A taxa de juros nominal, i, é resultante da soma de uma taxa de juros dita real, i*, mais a expectativa que se tem da inflação ao longo do período da operação financeira, Ip, e mais um prêmio pelo risco percebido na operação de concessão de empréstimo, Rp_1.

A taxa de juros real, i*, é a taxa que, teoricamente, equilibra a oferta e a demanda por empréstimos, em condições ideais. São condições ideais porque essa taxa assume que não existe inflação; que as pessoas não têm preferência pela liquidez; que não existe risco e que todos os resultados são certos. Como tais condições não existem na realidade econômica, é preciso acrescentar-lhe a expectativa de inflação, Ip, e o prêmio pelo risco, Rp_1, para explicar a

[1] Gitman (2010), emprega a letra r para simbolizar a taxa de juros. Emprega-se, aqui a letra i a fim de padronizar toda a notação usada no texto.

taxa nominal, i, praticada na realidade do mercado financeiro.

A taxa Ip, expectativa inflacionária, é a correção do valor do dinheiro, de modo que seu poder aquisitivo não seja corroído pela inflação. A teoria econômica define inflação como alta generalizada dos preços e a sua ocorrência também já era identificada na mais remota Antiguidade. Os historiadores supõem que o Império macedônio, de Alexandre Magno, já tivesse sentido os seus efeitos trezentos anos a.C. A este respeito, Morgan (1965, p. 67) informa que:

> "É de crer que os saques aos tesouros dos povos submetidos proporcionaram grandes quantidades de ouro e prata e que este súbito aumento da oferta de moeda se associou a uma violenta subida dos preços. Se assim foi, trata-se de um exemplo bastante antigo de uma inflação monetária, mas não dispomos de provas suficientes para podermos concluir com segurança."

De lá para cá a história econômica registra inúmeros processos inflacionários. Entre os mais significativos, conta-se a inflação provocada pela enorme acumulação de ouro e prata pela Espanha, na exploração dos povos da América Central e do Peru, no século XVI e a hiperinflação na Alemanha, consequência dos pagamentos das dívidas que lhe foram impostas como reparação, após a Primeira Guerra Mundial.

Já o terceiro componente da taxa de juros nominal é o prêmio exigido pelo risco inerente à operação de empréstimo. O risco é definido como a probabilidade de que os resultados reais possam diferir dos resultados esperados (GITMAN, 2010). Pode ter três causas essenciais: inadimplência, liquidez e risco de vencimento. Risco de inadimplência é a possibilidade de o devedor não pagar os juros e/ou o principal no tempo e/ou no volume pactuados. O risco de liquidez, ou de negociabilidade, decorre da possibilidade de alguns títulos de dívida apresentarem dificuldades de venda, caso o credor decida desfazer-se deles antes do vencimento. O risco de vencimento, por sua vez, afeta com maior intensidade os títulos de dívida de prazo mais longo e decorre da possibilidade de alteração da taxa de juros, contra os interesses do credor, durante o período de tempo em que dura o empréstimo (WESTON; BRIGHAM, 2000).

Assim, estes três componentes – taxa de juros real, expectativa de inflação e prêmio pelo risco – explicam a composição da taxa nominal de juros vigente em determinada economia, em determinado momento.

2.2. A matemática financeira

O juro é estabelecido na forma de um porcentual por unidade de tempo, sobre o capital emprestado. A matemática financeira desenvolveu três formas para o seu cálculo, quanto ao regime de capitalização: simples, composta e instantânea; interessam ao tema aqui tratado os regimes de capitalização simples e composta. No primeiro regime, de acordo com Vieira Sobrinho (2000), só o capital rende juros, em todas as unidades de tempo em que dura o empréstimo. A relação matemática entre o valor atual, ou capital, e o valor futuro, ou montante em pagamento único, de uma operação de empréstimo a juros simples é definida por:

$$M \text{ (Montante)} = C \text{ (Capital)} \times (1 + n \times i) \qquad (*1)$$

Na expressão (*1) n é o número de períodos de contagem de juros e i é a taxa de juros centesimal – taxa de juros dividida por 100.

De modo distinto no segundo regime, o de capitalização composta, a partir do início da segunda unidade de tempo, os juros incorporam-se ao capital e passam, também eles, a render juros; o processo é conhecido como juros sobre juros, juros capitalizados ou, ainda, juros compostos (ASSAF NETO, 2003). A relação matemática entre o valor atual, ou capital, e o valor futuro, ou montante em pagamento único, de uma operação de empréstimo a juros compostos é definida por:

$$M \text{ (Montante)} = C \text{ (Capital)} \times (1 + i)^n \qquad (*2)$$

Nessa definição, n também estabelece o número de períodos de contagem de juros e i define a taxa de juros centesimal.

O retorno do capital e dos juros ao prestamista pode ser feito de várias maneiras. Para efeito do tema aqui tratado, interessa o sistema Price. Desenvolvido pelo matemático inglês Richard Price, no século XVIII, o sistema consiste em devolver o capital e pagar os juros ao prestamista, mediante o pagamento de prestações iguais e consecutivas, uma a cada unidade de tempo a que se refere a taxa de juros (VIEIRA SOBRINHO, 2000). A função matemática abaixo permite calcular o valor das prestações nesse sistema:

$$P \text{ (Prestação)} = C \text{ (Capital)} \times \frac{(1 + i)^n \times i}{(1 + i)^n - 1} \qquad (*3)$$

Essa função permite calcular o valor da prestação *postecipada*, isto é, aquela que é paga no *final* de cada período de contagem de juros. Para o cálculo da prestação *antecipada* – aquela que é paga no *início* de cada período de contagem de juros –, a fórmula sofre uma ligeira modificação que não altera a substância das demonstrações adiante contidas.

2.3. Notação

Em todas as demonstrações algébricas, emprega-se a seguinte convenção:
C = capital, valor do empréstimo, ou valor presente na data zero;
P = valor das prestações;
n = número de prestações ou de períodos de contagem de juros;
i = taxa centesimal de juros;
M = montante, ou valor futuro da operação; é a soma do capital inicial, com os juros resultantes da operação;
Vf = valor futuro de uma operação de empréstimo, ou valor da operação no final do enésimo período;
Vp = valor presente, igual ao valor futuro, ou à prestação, descontada para a data atual.

3. Análise e apresentação dos resultados

3.1. A demonstração que pode confundir não iniciados

Existe uma maneira de demonstrar o desenvolvimento de uma operação de amortização pelo sistema Price, que pode conduzir facilmente à conclusão de que se trata de uma operação a juros simples, iludindo quem não esteja familiarizado com a matemática financeira. Para exemplificar, observe-se que um capital de $ 200,00 sendo amortizado à taxa de 6,76 % ao período, em cinco prestações iguais, consecutivas e postecipadas pelo sistema Price, gera uma prestação de $ 48,4651 – aplicando a função (*3):

$$P = 200 \times \frac{(1 + 0{,}0676)^5 \times 0{,}0676}{(1 + 0{,}0676)^5 - 1} = 48{,}4651$$

A decomposição de tal operação, do instante zero até o final do quinto período, pode ser demonstrada em tabelas como as apresentadas a seguir. Na tabela I, demonstra-se o desenvolvimento da operação como se os juros fossem pagos integralmente em cada período de ocorrência, o que pode produzir a ilusão de que se trata de uma operação a juros simples. Na tabela II, demonstra-se exatamente a mesma operação, mas com a capitalização integral dos juros, até que não haja mais capital a amortizar; a partir daí, passa-se a pagar os juros capitalizados até então.

Constata-se que o capital amortizado em cada prestação é igual ao valor da prestação depois de deduzidos todos os juros incorridos no período. Assim, uma vez que os juros são integralmente pagos no respectivo período de incidência, não se incorporam ao saldo a pagar e, com isso, cria-se a im-

Tabela I – Decomposição de uma amortização Price postecipada – juros pagos

	Saldo no Início do Período	Juros do Período	Saldo Antes da Prestação	Prestação	Juros Pagos	Capital Pago	Saldo no Final do Período	Composição do Saldo no Final	
								Juros	Capital
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
0							200,0000		200,0000
1	200,0000	13,5200	213,5200	48,4651	13,5200	34,9451	165,0549	0,0000	165,0549
2	165,0549	11,1577	176,2126	48,4651	11,1577	37,3074	127,7475	0,0000	127,7475
3	127,7475	8,6357	136,3832	48,4651	8,6357	39,8294	87,9181	0,0000	87,9181
4	87,9181	5,9433	93,8614	48,4651	5,9433	42,5218	45,3963	0,0000	45,3963
5	45,3963	3,0688	48,4651	48,4651	3,0688	45,3963	0,0000	0,0000	0,0000

Fonte: os autores

① = Saldo a pagar no final do período imediatamente anterior.

② = Aplicação da taxa de juros sobre o saldo no início do período: ② = ① x i.

③ = ① + ② , Saldo a pagar no período, antes do pagamento da respectiva prestação.

④ = Valor da prestação calculado pelo sistema Price postecipado.

⑤ = Parcela de juros incorporada à prestação. Assume-se, aqui, que os juros incorridos em cada período, coluna ②, sejam pagos integralmente na prestação do respectivo período.

⑥ = Valor do capital amortizado em cada prestação: ⑥ = ④ – ⑤ É o valor da prestação que sobra depois de pagos os juros; é o que sobra da prestação para amortizar o capital.

⑦ = Saldo a pagar da operação no final de cada período. Na hipótese aqui examinada, o saldo é composto exclusivamente pela parcela de capital ainda não amortizada, uma vez que se assume que os juros incorridos no período são pagos integralmente pela respectiva prestação: ⑦ = ③ – ④.

⑧ = Parcela do valor dos juros que integra o saldo a pagar no final do período. Como, nessa hipótese, se assume que os juros sejam integralmente pagos pela prestação, tais parcelas são todas nulas.

⑨ = Parcela do capital que integra o saldo da operação no final do período. Como, nessa hipótese, se assume que os juros sejam integralmente pagos pela prestação, o saldo é formado exclusivamente por capital; ⑨ = ⑦.

pressão de que se trata de uma operação a juros simples. Todavia, mesmo assumindo que em cada prestação estivesse sendo paga apenas a metade dos juros incorridos no período e que a outra metade estivesse sendo capitalizada – incorporada ao saldo devedor –, ainda assim o valor dos juros, da prestação e do saldo devedor não iriam se alterar. Na tabela II a seguir, demonstra-se a mesma operação, em condição oposta à da tabela I: os juros são integralmente capitalizados até a quinta prestação, quando já não há mais capital a amortizar.

Estas duas demonstrações conduzem à conclusão de que o sistema Price tanto pode liquidar os juros incorridos em cada período, na respectiva prestação, quanto pode capitalizá-los. Ou seja: uma vez que demonstra que é indiferente considerar que os juros sejam pagos ou sejam capitalizados, esse tipo de demonstração não prova qual é o regime de capitalização do sistema Price. Assim, é falso empregar uma demonstração como a da Tabela I para provar que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros simples.

3.2. Valor presente das prestações, a juros compostos e a juros simples

A primeira prova apresentada neste texto, a de que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros compostos, é a comparação do cálculo da soma do valor presente das prestações, descontadas a juros compostos e a juros simples.

Nas tabelas I e II foi empregada, como exemplo, a amortização de um capital de $ 200,00 em cinco pagamentos postecipados, a uma taxa de juros de 6,76% ao período, resultando em cinco prestações de 48,4651. Descontando-se todas as prestações, para valor presente, à mesma taxa empregada

Tabela II – Decomposição de uma amortização Price postecipada – juros capitalizados

	Saldo no Início do Período	Juros do Período	Saldo Antes da Prestação	Prestação	Juros Pagos	Capital Pago	Saldo no Final do Período	Composição do Saldo no Final	
								Juros	Capital
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
0							200,0000		200,0000
1	200,0000	13,5200	213,5200	48,4651	0,0000	48,4651	165,0549	13,5200	151,5349
2	165,0549	11,1577	176,2126	48,4651	0,0000	48,4651	127,7475	24,6777	103,0698
3	127,7475	8,6357	136,3832	48,4651	0,0000	48,4651	87,9181	33,3134	54,6047
4	87,9181	5,9433	93,8614	48,4651	0,0000	48,4651	45,3963	39,2567	6,1396
5	45,3963	3,0688	48,4651	48,4651	42,3255	6,1396	0,0000	0.0000	0,0000

Fonte: os autores

① = Saldo a pagar no final do período imediatamente anterior.

② = Aplicação da taxa de juros sobre o saldo no início do período: ② = ① x i.

③ = ① + ② Saldo a pagar no período, antes do pagamento da respectiva prestação.

④ = Valor da prestação calculado pelo sistema Price postecipado.

⑤ = Assume-se, aqui, que os juros incorridos no período, coluna ②, sejam integralmente capitalizados, ou seja, incorporados ao saldo no final do período, até que o valor total do capital seja totalmente amortizado.

⑥ = Valor do capital amortizado em cada prestação: ⑥ = ④ – ⑤ Assume-se, aqui, que a prestação amortize prioritariamente o capital. Assim, posteriormente, apenas na quinta prestação será pago o valor dos juros acumulados até então.

⑦ = Saldo da operação no final de cada período. Na hipótese aqui examinada, esse saldo é composto parte pelo capital ainda a amortizar e parte pela capitalização dos juros. ⑦ = ③ – ④.

⑧ = Parcela de juros que integra o saldo a pagar no final do período. Como, nessa hipótese, se assume que os juros sejam integralmente capitalizados, o valor de juros que integra o saldo no final do período é o somatório dos juros incorridos em todos os períodos anteriores, coluna ②, até que o capital seja totalmente amortizado.

⑨ = Parcela de capital que integra o saldo da operação no final do período. Como se assume que os juros são integralmente capitalizados, este saldo é igual ao saldo na mesma coluna no período imediatamente anterior, menos o valor amortizado, conforme coluna ⑥.

para calcular o valor da prestação, a modalidade de desconto – simples ou composta – que resultar no mesmo valor de capital inicial será aquela sobre a qual se fundamenta o sistema Price. O cálculo só se mostrará exato no regime de capitalização sobre o qual se fundamenta o sistema Price, utilizado para calcular o valor das prestações. Examinam-se a seguir as duas possibilidades.

O cálculo da soma do valor presente das prestações a juros simples, Vp_s, é dado pela seguinte expressão, deduzída da expressão (*1):

$$Vp_S = P \times \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + j \times i} \right) \qquad (*4)$$

Empregando-a para calcular a soma do valor presente das prestações:

$$Vp = 48,4651 \times \left(\frac{1}{1+0,0676} + \frac{1}{1+2\times 0,0676} + ... + \frac{1}{1+5\times 0,0676} \right) = 202,7537$$

Como a soma dos valores das prestações, descontadas ao valor presente a juros simples, pela mesma taxa empregada para calcular o valor das prestações pelo sistema Price, resultou num valor maior do que o capital original, $ 200,00, é conclusivo que o sistema empregado para o cálculo das prestações *não é baseado* no conceito de juros simples.

Por sua vez, o cálculo da soma do valor presente das prestações a juros compostos, Vp_c, é dado pela seguinte expressão, deduzida da expressão (*2):

$$Vp_C = P \times \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{(1+i)^j} \right) \qquad (*5)$$

Empregando-a para calcular a soma do valor presente das prestações:

$$Vp = 48,4651 \times \left[\frac{1}{(1+0,0676)^1} + \frac{1}{(1+0,0676)^2} + \ldots.. + \frac{1}{(1+0,0676)^5} \right] = 200,0000$$

Como a soma dos valores das prestações, descontados ao valor presente, a juros compostos, pela mesma taxa empregada para calcular o seu valor pelo sistema Price, resulta exatamente no valor do capital original, $ 200,00, é também conclusivo que o sistema empregado para o cálculo das prestações é baseado no conceito de juros compostos.

Trata-se, por conseguinte, de uma dupla prova: 1ª) o sistema Price *não é* baseado em juros simples; e 2ª) *é* baseado em juros compostos.

3.3. A fórmula para o cálculo da prestação no sistema Price

A dedução da fórmula para o cálculo da prestação no sistema Price também comprova a sua fundamentação no conceito de juros compostos; veja-se o procedimento dedutivo.

O montante de uma operação de amortização pelo sistema Price, ao final do primeiro período, e antes do pagamento da primeira prestação, M_1 é dado por:

$$M_1 = C + C \times i \quad \text{donde:} \quad M_1 = C \times (1 + i)$$

Neste momento é paga a primeira prestação P_1. Assim, o montante parcial, ou saldo devedor ao final do primeiro período, fica sendo:

$$M_1 = C \times (1 + i) - P$$

No sistema Price, o montante M_1 passa a ser o capital sobre o qual incidem juros no segundo período. Desse modo, o montante ao final do segundo período, e depois do pagamento da segunda prestação, ficará sendo:

$$M_2 = M_1 \times (1+i) - P_2 \therefore M_2 = C \times (1+i)^2 - P_1 \times (1+i) - P_2$$

Desenvolvendo esta expressão até o enésimo período, no momento imediatamente anterior ao pagamento da última prestação, chega-se a:

$$M_N = C \times (1+i)^N - P_1 \times (1+i)^{N-1} - P_2 \times (1+i)^{N-2} \ldots - P_{n-1} \times (1+i) \qquad (*6)$$

Este ponto – função (*6) – é o momento de pagar a última prestação. Então, o montante M_N terá que ser, obrigatoriamente, igual ao valor da prestação, $M_N = P_n$, dado que, com o pagamento da última prestação, encerra-se a operação. A expressão (*6) pode, então, ser escrita:

$$P_n = C \times (1+i)^N - P_1 \times (1+i)^{N-1} - P_2 \times (1+i)^{N-2} - ..... - P_{n-1} \times (1+i)$$

Donde:

$$C \times (1+i)^N = P \times \left[\sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^j \right] \qquad (*7)$$

Observa-se que tanto o capital inicial quanto as prestações são levados a valor futuro a juros compostos igualando-se a ambos: o capital a valor futuro e a soma das prestações, também a valor futuro na data exata do pagamento da última prestação. Fica explícito, por conseguinte e de modo incontestável, que se trata de operação a juros compostos.

Manipulando, agora, a expressão (*7), e desenvolvendo o lado direito da igualdade, isola-se o valor de P:

$$P = \frac{C \times (1+i)^N}{(1+i)^{N-1} + (1+i)^{N-2} + ... + 1} \qquad (*8)$$

O numerador da expressão (*8) contém o valor do capital levado a juros compostos a valor futuro, até o final do último período. O denominador contém a soma dos termos de uma progressão geométrica – característica dos juros compostos – de n termos, na qual o primeiro termo é 1, $a_1 = 1$, e cuja razão é (1+i), q = (1+i). A divisão do valor futuro do capital pela progressão geométrica referida, nem sob o mais falacioso argumento poderia resultar em juros simples, como pretendem alguns defensores da suposição de que o sistema Price se fundamenta no conceito de juro simples.

Por fim, aplicando ao denominador de (*8) a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica e resolvendo a expressão para P, chega-se à função, já apresentada em (*3), que permite calcular o valor da prestação:

$$P = C \times \frac{(1+i)^N \times i}{(1+i)^N - 1}$$

Estabelecendo C = 1 nesta função e fazendo variar "i" e "n" num intervalo desejado, obtêm-se os coeficientes que permitem calcular o valor de P para cada dupla i/n desejada. Tal tabela de coeficientes é conhecida por "Tabela Price":

Tabela III – Tabela Price – EXEMPLO

n \ i	1 %	2 %	3 %	
2	0,5075	0,5150	0,5226	....
3	0,3400	0,3468	0,3535	....
4	0,2563	0,2626	0,2690	....
....	....	....	....	....

Fonte: os autores

3.4. Amortização a juros simples com prestações iguais e consecutivas

Até aqui ficou demonstrado e comprovado que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros compostos e que emprega os procedimentos matemáticos característicos e exclusivos dos juros compostos. Por fim, sob a hipótese absurda de que tais comprovações fossem insuficientes, demonstra-se adiante como é um sistema de amortização de dívidas, mediante o pagamento de prestações iguais e consecutivas – este, agora sim, a juros simples.

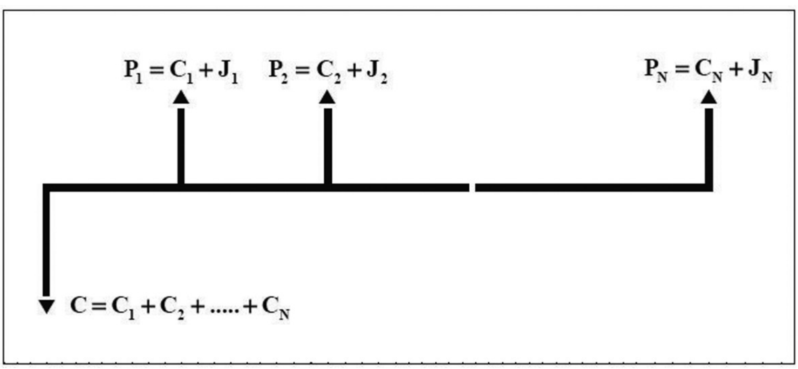
Existem métodos que fornecem uma aproximação razoável; o método que se demonstra a seguir resulta em cálculos exatos.

Para que um sistema de amortização se fundamente no conceito de juros simples, é indispensável que o capital inicial, C, seja subdividido em tantas partes quantas forem as prestações, C_1, C_2, ..., C_n, cada parte diferente uma da outra, e que cada uma das partes seja capitalizada uma única vez, isto em função da metodologia simples. A parte correspondente à primeira prestação deverá ser maior do que aquela correspondente à segunda, e assim sucessivamente, tal que $C_1 > C_2 > ... > C_n$.

Pela mesma razão, o valor dos juros incidentes sobre a primeira prestação deverá ser menor do que o valor dos juros incidentes sobre a segunda e, assim, sucessivamente. Isto porque, considerando que serão aplicadas à mesma taxa e em tempos diferentes, produzirão juros diferentes; ainda assim, em todas as prestações, a soma da respectiva parcela de capital mais os juros correspondentes, deverá resultar no mesmo valor de prestação.

A figura seguinte ilustra tal condição.

Figura I – Amortização a juros simples



Fonte: os autores

Sendo que: $C = C_1 + C_2 + ... + C_N$

Onde: $C_1 = \frac{P_1}{1+i}, \quad C_2 = \frac{P_2}{1+2\times i}, \quad ..... \quad C_n = \frac{P_n}{1+n\times i}$

Substituindo $C_1, C_2, ..., C_N$ em $C = C_1 + C_2 + ... + C_N$

$$C = \frac{P_1}{1+1\times i} + \frac{P_2}{1+2\times i} + ... + \frac{P_n}{1+n\times i}$$

Considerando que: $P_1 = P_2 = ... = P_N = P$, tem-se que:

$$C = \frac{P}{1+1\times i} + \frac{P}{1+2\times i} + ... + \frac{P}{1+n\times i} = P.\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+j\times i}$$

Donde, finalmente: $$P = C\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+ji}} \qquad (*9)$$

A expressão (*9), facilmente aplicável tanto nos cálculos manuais, quanto mediante o emprego de planilhas eletrônicas, permite calcular o valor da prestação, em um sistema de amortização a juros simples, com prestações iguais e consecutivas. Ao contrário de métodos aproximativos, a função (*9) proporciona o cálculo exato.

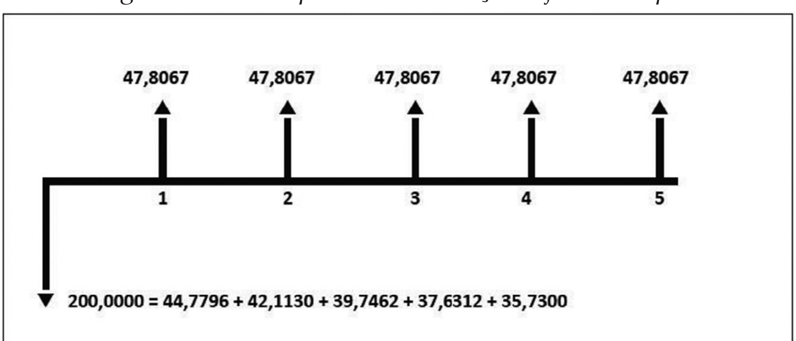
3.5. Exemplo numérico

Com os mesmos valores já empregados nas tabelas I e II, calculemos o valor das prestações constantes e sucessivas de uma amortização fundamentada no conceito de juros simples. Para isso, emprega-se a função (*9) desenvolvida acima.

$$P = 200\left(\frac{1}{\frac{1}{1+0{,}0676} + \frac{1}{1+2\times 0{,}0676} + \frac{1}{1+3\times 0{,}0676} + \frac{1}{1+4\times 0{,}0676} + \frac{1}{1+5\times 0{,}0676}}\right) = 47{,}8067$$

Para um capital de 200,00, à taxa de 6,76 % ao período, em cinco pagamentos, a figura seguinte ilustra tal amortização.

Figura II – Exemplo de amortização a juros simples



Fonte: os autores

Observa-se que, para poder estabelecer o valor de uma prestação constante a juros simples, foi preciso decompor o capital inicial em cinco parcelas desiguais, de tal modo que, quando se aplicou a mesma taxa de juros simples a todas elas resultou, cada uma no seu devido período, em um mesmo valor de prestação. A tabela seguinte demonstra o desenvolvimento dessa operação.

Para determinar o capital inicial de cada parcela, foi calculado o valor presente de cada prestação, com os juros respectivos calculados ao lado:

$$C_1 = \frac{P_1}{1+1\times i} = \frac{47,8067}{1+1\times 0,0676} = 44,7796 \quad e \therefore \quad J_1 = C_1 \times i \times 1 = 44,7796 \times 0,0676 \times 1 = 3,0271$$

$$C_2 = \frac{P_2}{1+2\times i} = \frac{47,8067}{1+2\times 0,0676} = 42,1130 \quad e \therefore \quad J_2 = C_2 \times i \times 2 = 42,1130 \times 0,0676 \times 2 = 5,6937$$

$$C_3 = \frac{P_3}{1+3\times i} = \frac{47,8067}{1+3\times 0,0676} = 39,7462 \quad e \therefore \quad J_3 = C_3 \times i \times 3 = 39,7462 \times 0,0676 \times 3 = 8,0605$$

$$C_4 = \frac{P_4}{1+4\times i} = \frac{47,8067}{1+4\times 0,0676} = 37,6312 \quad e \therefore \quad J_4 = C_4 \times i \times 4 = 37,6312 \times 0,0676 \times 4 = 10,1755$$

$$C_5 = \frac{P_5}{1+5\times i} = \frac{47,8067}{1+5\times 0,0676} = 35,7300 \quad e \therefore \quad J_5 = C_5 \times i \times 5 = 35,7300 \times 0,0676 \times 5 = 12,0767$$

Cada parte do capital acrescida dos juros respectivos resulta no valor da prestação:

$$P_1 = 44,7796 \times (1+1\times 0,0676) = 47,8067 \quad \therefore \quad J_1 = 3,0271 \therefore P_1 = 44,7796 + 3,0271 = 47,8067$$
$$P_2 = 42,1130 \times (1+2\times 0,0676) = 47,8067 \quad \therefore \quad J_2 = 5,6937 \therefore P_2 = 42,1130 + 5,6937 = 47,8067$$
$$P_3 = 39,7462 \times (1+3\times 0,0676) = 47,8067 \quad \therefore \quad J_3 = 8,0605 \therefore P_3 = 39,7462 + 8,0605 = 47,8067$$
$$P_4 = 37,6312 \times (1+4\times 0,0676) = 47,8067 \quad \therefore \quad J_4 = 10,1755 \therefore P_4 = 37,6312 + 10,1755 = 47,8067$$
$$P_5 = 35,7300 \times (1+5\times 0,0676) = 47,8067 \quad \therefore \quad J_5 = 12,0767 \therefore P_5 = 35,7300 + 12,0767 = 47,8067$$

A tabela IV demonstra a sequência desta amortização, a juros simples.

O valor somado destas cinco prestações, descontadas ao valor presente a juros simples resultará, exatamente, nos $ 200,00 de capital que lhes deu origem:

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_N = 44,7796 + 42,1130 + 39,7462 + 37,6312 + 35,73 = 200,00$$

Isso prova que a metodologia que aqui se propõe para o cálculo de uma amortização com prestações iguais e sucessivas: 1) fundamenta-se no conceito e nos procedimentos de cálculo dos juros simples e 2) produz resultados exatos.

Tabela IV – Decomposição de uma amortização a juros simples

	Saldo no Início do Período	Parcela de Capital do Período	Juros do Período	Prestação	Juros Pagos	Capital Pago	Saldo no Final do Período	Composição do Saldo no Final	
								Juros	Capital
		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑨
0							200,0000	0,0000	200,0000
1	200,0000	44,7796	3,0271	47,8067	3,0271	44,7796	155,2204	0,0000	155,2204
2	155,2204	42,1130	5,6937	47,8067	5,6937	42,1130	113,1074	0,0000	113,1074
3	113,1074	39,7462	8,0605	47,8067	8,0605	39,7462	73,3612	0,0000	73,3612
4	73,3612	37,6312	10,1755	47,8067	10,1755	37,6312	35,7300	0,0000	35,7300
5	35,7300	35,7300	12,0767	47,8067	12,0767	35,7300	0,0000	0,0000	0,0000

Fonte: os autores
① = Saldo a pagar no final do período imediatamente anterior.
② = Parcela de capital correspondente ao período.
③ = ② x n x i.
④ = Valor da prestação calculado pelo sistema de amortização a juros simples.
⑤ = Valor dos juros pagos: ⑤ = ③.
⑥ = Valor do capital amortizado em cada prestação: ⑥ = ② O valor de cada prestação é gerado pela respectiva parcela de capital, conforme destacado na coluna ②.
⑦ = Saldo da operação no final de cada período. ⑦ = ① - ⑥.
⑧ = Parcela de juros que integra o saldo da operação no final do período.
⑨ = Parcela de capital que integra o saldo da operação no final do período.

4. Conclusões

Este artigo propôs-se provar que o sistema Price fundamenta-se no conceito de juros compostos bem como nos seus procedimentos de cálculo característicos. Propôs-se também demonstrar o fundamento conceitual e os procedimentos de cálculo de um sistema de amortização, semelhante ao sistema Price, em prestações iguais e consecutivas, porém a juros simples.

Para isso, inicialmente se demonstrou que a decomposição de uma amortização pelo sistema Price tanto pode ser feita com pagamento integral, parcial ou nulo de juros, a cada período. Isso desqualifica tal tipo de demonstração como prova de que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros simples.

Em seguida, recorrendo ao cálculo do valor presente, demonstrou-se, mediante o emprego de exemplo numérico, em dupla prova que: 1) o sistema Price não pode estar fundamentado no conceito de juros simples e 2) que está, efetivamente, fundamentado no conceito de juros compostos e nos seus procedimentos de cálculo específicos e exclusivos.

Depois, recorrendo a uma demonstração analítica, provou-se que o sistema Price se fundamenta no conceito de juros compostos.

Finalmente, demonstrou-se como é um sistema de amortização fundamentado no conceito de juros simples, com resultados exatos, o que também não deixa de ser uma prova de que o sistema Price não se fundamenta nesse conceito de cálculo de juros.

Observa-se, para concluir, que a relevância dessas demonstrações reside especialmente numa contribuição essencial às decisões judiciais que venham a ser prolatadas e que digam respeito à matéria aqui tratada – contribuição que motivou a análise do tema e a produção deste texto.

Referências

ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática financeira e suas aplicações*. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

BRASIL. Constituição (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.* Brasília: Senado Federal, Subsecretaria de Edições Técnicas, 2003.

______. Decreto nº 22.626, de 7 de abril de 1933. Dispõe sobre os juros nos contratos e da outras providencias. *Diário Oficial da União*, Brasília, 8 de abr. de 1933. Seção 1, p. 6995. Disponível em: <http://www6.senado.gov.br/legislacao/ListaTextoIntegral.action?id=75896&norma=102665>. Acesso em: 14 mar. 2012.

______. Lei nº 3.071, de 1º de Janeiro de 1916. Código Civil dos Estados Unidos do Brasil. *Diário Oficial da União*, Brasília, 5 jan. 1916. Seção 1, p. 133. Disponível em: <http://www6.senado.gov.br/legislacao/ListaTextoIntegral.action?id=75875&norma=102644>. Acesso em: 14 mar. 2012.

______. Constituição de 1946. *Diário Oficial da União*, Brasília, 19 set. 1946. Seção 1, p. 13059. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/consti/1940-1949/constituicao-1946-18-julho-1946--365199-norma-pl.html>. Acesso em: 14 mar. 2012.

DEMÓSTHENES. *Private orations*. Cambridge: Harvard University, 1936.

GITMAN, Lawrence J. *Princípios de administração financeira*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

KEYNES, John Maynard. *A teoria geral do emprego, do juro e da moeda*. São Paulo: Atlas, 1992.

LE GOFF, Jacques. *A bolsa e a vida*: economia e religião na Idade Média. São Paulo: Brasiliense, 1989.

MORGAN, Edward Victor. *Breve história do dinheiro*. Lisboa: Ulisséia Limitada, 1965.

PUCCINI, Abelardo de Lima. *Matemática financeira*: objetiva e aplicada. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

VIEIRA SOBRINHO, Jose Dutra. *Matemática financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

WESTON, J. Fred; BRIGHAM, Eugene. *Fundamentos da administração financeira*. 10. ed. São Paulo: Makron Books, 2000.